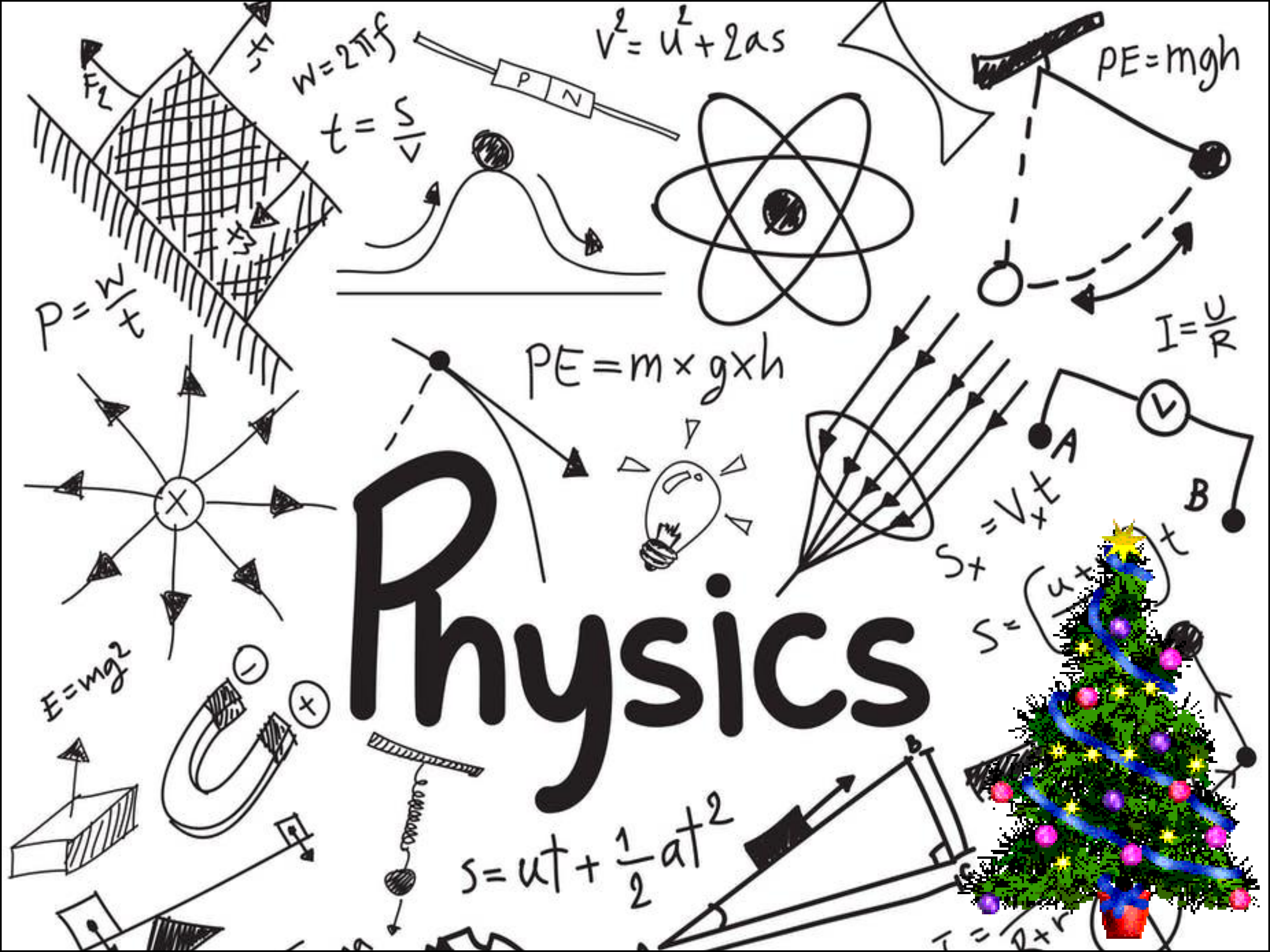
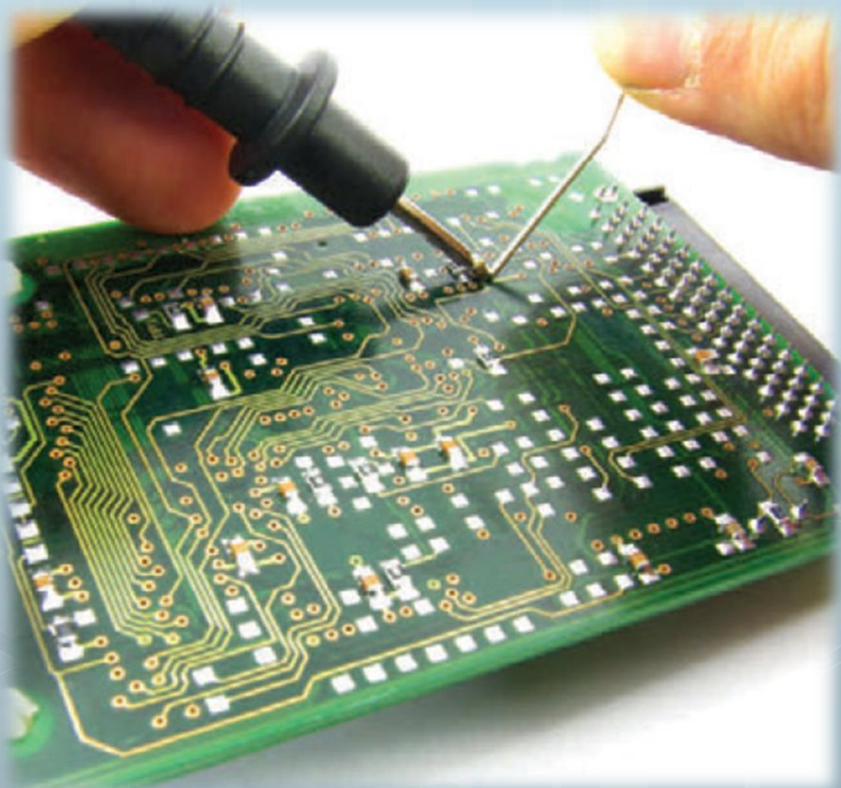


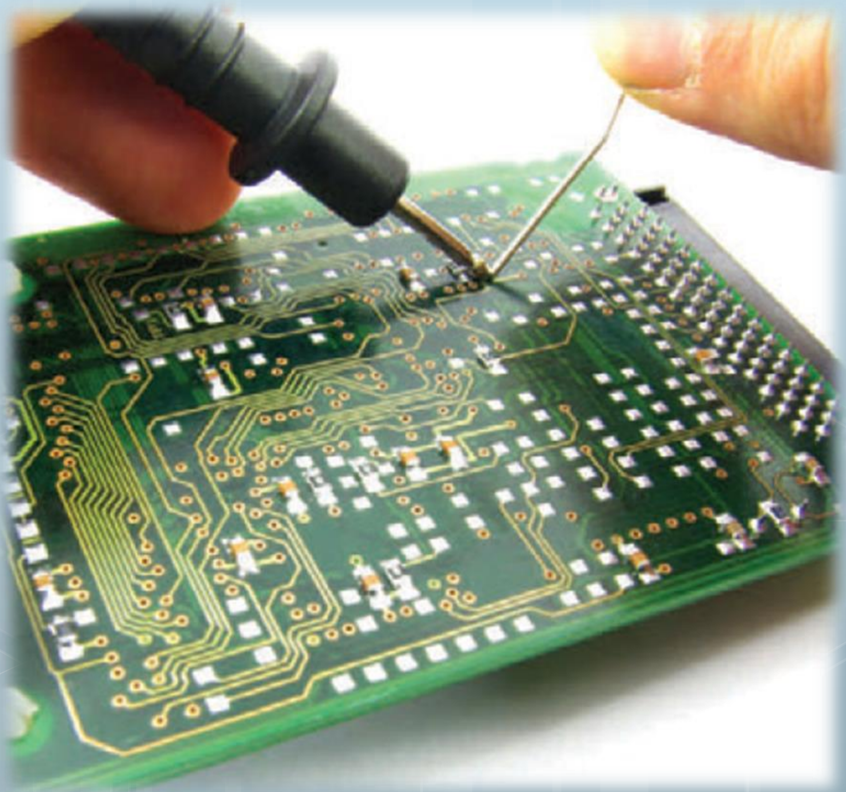
Physics
W=2πf
V²=u²+2as
PE=mgh
t = S/V
P N
P = W/t
PE=m×g×h
I=U/R
A
B
E=mg²
s=ut+½at²



Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος



Εικόνα: Επισκευή μιας πλακέτας κυκλωμάτων ενός υπολογιστή. Χρησιμοποιούμε καθημερινά αντικείμενα που περιέχουν ηλεκτρικά κυκλώματα, συμπεριλαμβανομένων και κάποιων με πολύ μικρότερες πλακέτες από την εικονιζόμενη. Μεταξύ αυτών, έχουμε τα φορητά βιντεοπαιχνίδια, τα κινητά τηλέφωνα, και τις ψηφιακές φωτογραφικές μηχανές. Σε αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε απλά ηλεκτρικά κυκλώματα και μαθαίνουμε πώς να τα αναλύουμε.

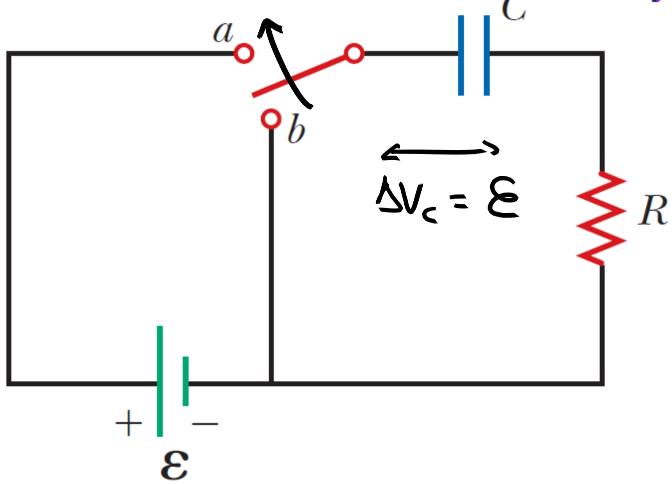
Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Κυκλώματα Συνεχούς Ρεύματος

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

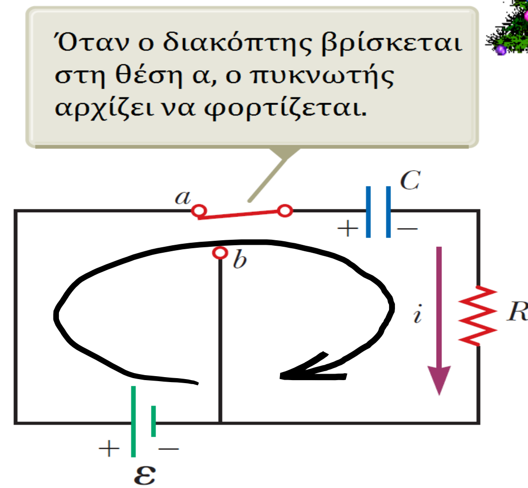
- **Κυκλώματα RC**
  - Ως τώρα αναλύσαμε κυκλώματα όπου το ρεύμα είναι σταθερό σε μέτρο
  - Αν όμως αρχίσουμε να χρησιμοποιούμε πυκνωτές στα κυκλώματά μας, το ρεύμα θα εξακολουθεί να σταθερή κατεύθυνση αλλά το μέτρο του μπορεί να αλλάζει σε διαφορετικές χρονικές στιγμές
  - Ένα κύκλωμα που αποτελείται από συνδυασμούς αντιστάσεων και πυκνωτών ονομάζεται ***RC-κύκλωμα***
    - Τέτοια βρίσκονται σε φλας φωτογραφικών μηχανών, σε βηματοδότες, σε φανάρια, στο αυτοκίνητό σας, ως φίλτρα αποκοπής συχνοτήτων, κλπ
  - Αυτά θα μελετήσουμε σήμερα

Ηλεκτρικά Κυκλώματα



- **Φόρτιση πυκνωτή**
  - Ας θεωρήσουμε ένα απλό RC κύκλωμα με αφόρτιστο αρχικά πυκνωτή
  - Όταν ο διακόπτης κλείσει τη χρονική στιγμή $t = 0$, (θέση α) ξεκινά να υπάρχει ρεύμα στο κύκλωμα, κι ο πυκνωτής ξεκινά να φορτίζεται
  - Όσο φορτίζεται, η διαφορά δυναμικού στα άκρα του αυξάνεται
  - Όταν επιτευχθεί το μέγιστο φορτίο, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα μηδενίζεται! Γιατί;
    - Γιατί δεν υπάρχει πια διαφορά δυναμικού στο κύκλωμα!
    - Ο πυκνωτής έχει $\Delta V_c = \boldsymbol{\mathcal{E}}$!

Ηλεκτρικά Κυκλώματα



- **Φόρτιση πυκνωτή**
  - Ας αναλύσουμε τη διαδικασία ποσοτικά
  - Σύμφωνα με το 2ο κανόνα του Kirchhoff (δεξιόστροφα):

$$\sum \Delta V = 0 \Leftrightarrow \Delta V_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma} + \Delta V_c + \Delta V_R = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{q}{C} - iR = 0$$

με i, q το ρεύμα και το φορτίο του πυκνωτή μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t > 0$

  - Αποτελούν δηλαδή ***στιγμιαίες*** τιμές
- Αρχικά, το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα είναι

$$\boldsymbol{\varepsilon} - 0 - i_0 R = 0 \Leftrightarrow i_0 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{R}, \qquad t = 0$$

  - …γιατί το φορτίο του πυκνωτή είναι αρχικά μηδέν
  - Τότε, η διαφορά δυναμικού της μπαταρίας εμφανίζεται εξ ολοκλήρου στα άκρα της αντίστασης

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Φόρτιση πυκνωτή**
  - Στο τέλος, όταν ο πυκνωτής είναι φορτισμένος στη μέγιστη τιμή του, τα φορτία παύουν να κινούνται και το ρεύμα στο κύκλωμα είναι μηδέν
    - Τότε, η διαφορά δυναμικού της μπαταρίας εμφανίζεται εξ ολοκλήρου στα άκρα του πυκνωτή
    - Το συνολικό φορτίο του πυκνωτή είναι

$$Q = C\Delta V = C\boldsymbol{\varepsilon}$$

  - Θα ήταν επιθυμητό να γνωρίζουμε αναλυτικά τις τιμές του φορτίου και του ρεύματος για κάθε χρονική στιγμή t, και όχι μόνο τι συμβαίνει στις δυο ακραίες καταστάσεις που περιγράψαμε
  - Ας το δούμε…

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Φόρτιση πυκνωτή**
  - Ξέρουμε ότι $i = \frac{dq}{dt}$ και άρα

$$\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{q}{C} - iR = 0 \iff \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{q - C\boldsymbol{\varepsilon}}{RC}$$

  - Πολλαπλασιάζοντας με dt και αναδιατάσσοντας

$$\frac{dq}{q - C\boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{1}{RC}dt$$

  - Ολοκληρώνοντας

$$\int_0^{\hat{q}} \frac{dq}{q - C\boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{1}{RC}\int_0^{\hat{t}} dt \iff \ln\left(\frac{\hat{q} - C\boldsymbol{\varepsilon}}{-C\boldsymbol{\varepsilon}}\right) = -\frac{\hat{t}}{RC}$$

  - Άρα

$$\boxed{q(t) = C\boldsymbol{\varepsilon}\left(1 - e^{-t/RC}\right) = Q\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Φόρτιση πυκνωτή**
  - Παραγωγίζοντας τη σχέση

$$q(t) = C\boldsymbol{\varepsilon}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

ως προς το χρόνο έχουμε ότι

$$\boxed{i(t) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{R} e^{-t/RC} = i_0 e^{-t/RC}}$$

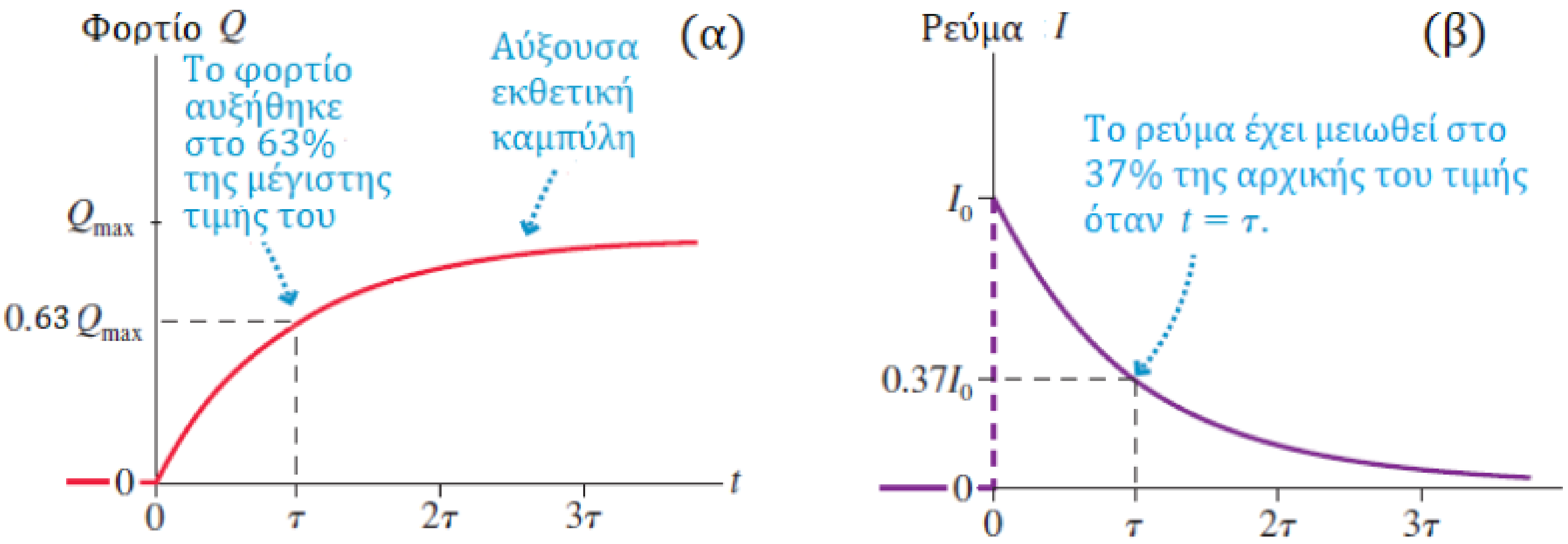
  - Η ποσότητα RC ονομάζεται ***χωρητική χρονική σταθερά τ***

$$\tau = RC$$

    - Εκφράζει τη χρονική στιγμή όπου το ρεύμα φθίνει στο $1/e$ της αρχική του τιμής $(0.368 I_i)$,
    - Αντίστοιχα, τη χρονική στιγμή όπου το φορτίο αυξάνει από $q = 0$ στην τιμή $q = 0.632 C\boldsymbol{\varepsilon}$
    - Με άλλα λόγια, εκφράζει τη χρονική στιγμή που ο πυκνωτής φορτίζεται στο 63.2% του συνολικού του φορτίου, $\mathrm{Q_{max}} = C\boldsymbol{\varepsilon}$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

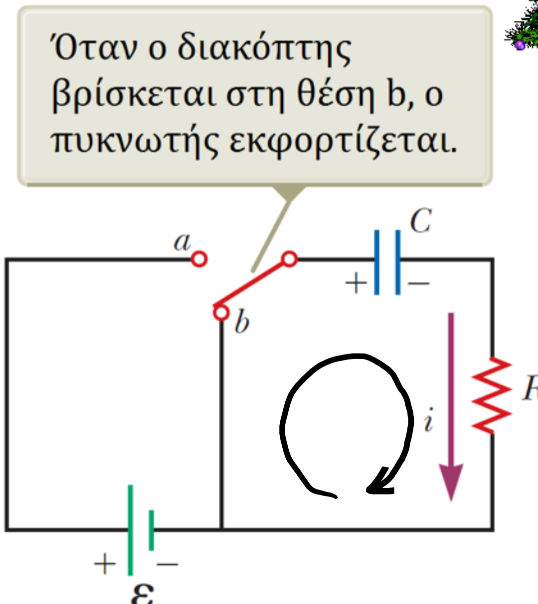
- **Φόρτιση πυκνωτή**



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Εκφόρτιση πυκνωτή**
  - Έστω ότι ο πυκνωτής είναι φορτισμένος με κάποιο φορτίο Q_0, άρα θα έχει μια διαφορά δυναμικού

$$\Delta V_c = \frac{Q_0}{C}$$

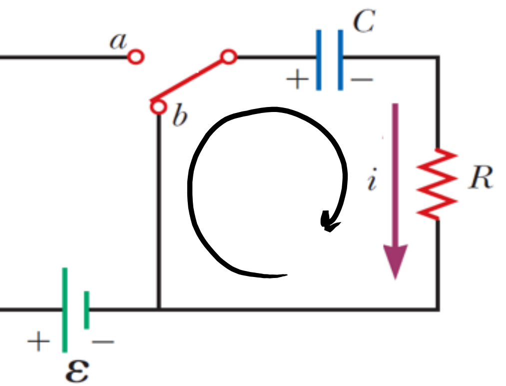


  - Για $t = 0$ κλείνουμε το διακόπτη στη θέση b, και τότε ο πυκνωτής θα εκφορτιστεί μέσω του αντιστάτη
  - Θα υπάρξει μια αρχική τιμή ρεύματος

$$I_0 = \frac{\Delta V_c}{R} = \frac{Q_0}{RC}, \qquad t = 0$$

  - Έστω μια χρονική στιγμή $t > 0$
    - Ο πυκνωτής θα έχει φορτίο $q < Q_0$
    - Το ρεύμα που θα διαρρέει το κύκλωμα είναι $i < I_0$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα



- **Εκφόρτιση πυκνωτή**
  - Από το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα (δεξιόστροφα), έχουμε

$$\Delta V_{\pi\upsilon\kappa\nu} + \Delta V_R = 0 \Leftrightarrow -\frac{q}{C} - iR = 0$$

  - Ξανά, θέτοντας $i = \frac{dq}{dt}$, έχουμε

$$-R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C} \Leftrightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$$

  - Ολοκληρώνοντας, έχουμε

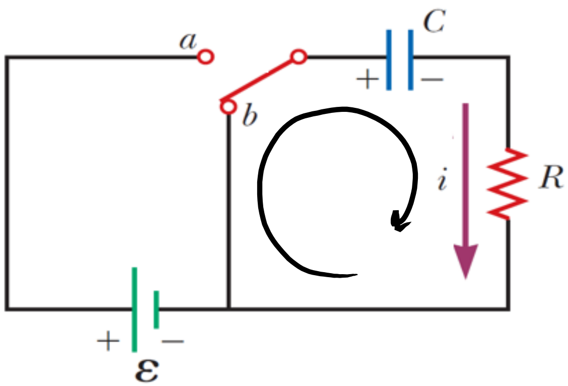
$$\int_{Q_0}^{\hat{q}} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^{\hat{t}} dt \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\hat{q}}{Q_0}\right) = -\frac{\hat{t}}{RC}$$

  - Άρα

$$\boxed{q(t) = Q_0 e^{-t/RC}}$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Εκφόρτιση πυκνωτή**
  - Παραγωγίζοντας τη σχέση



$$q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$$

ως προς το χρόνο, έχουμε

$$\boxed{i(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$$

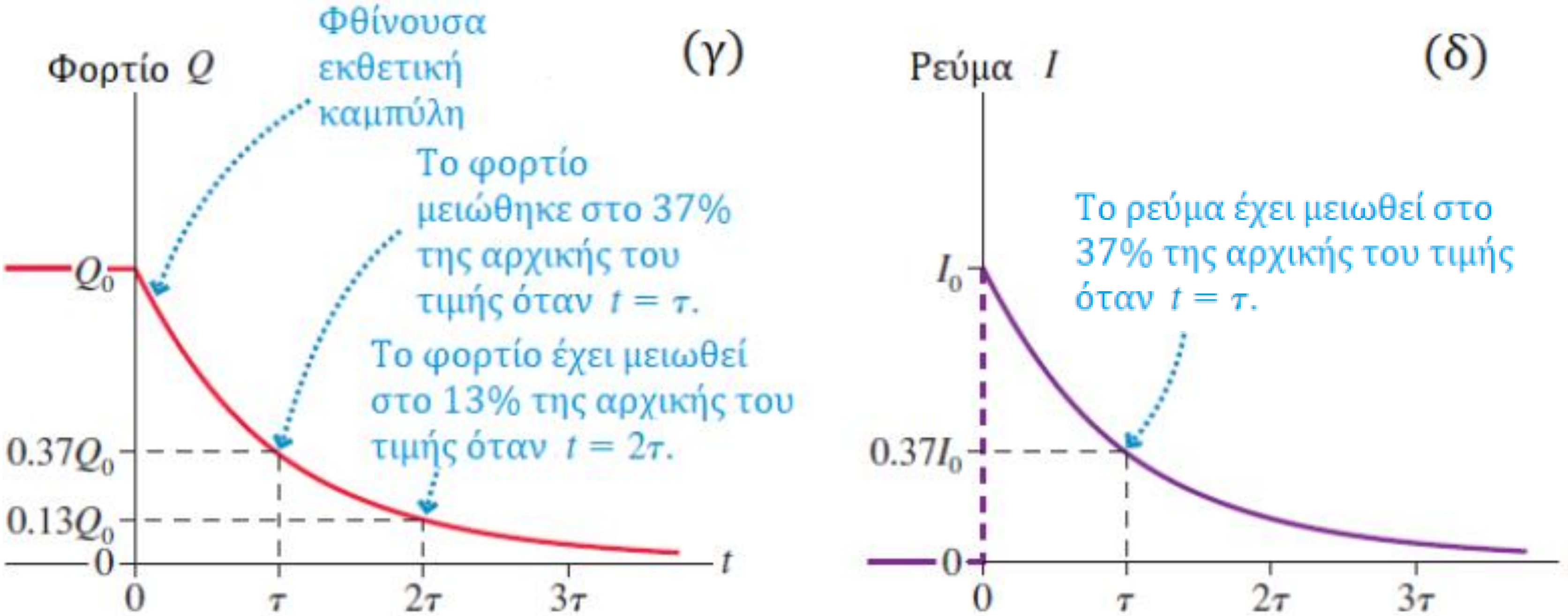
με

$$I_0 = \frac{\Delta V_c}{R}$$

- Το παραπάνω αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι το ρεύμα έχει αντίθετη κατεύθυνση από αυτή που είχε όταν ο πυκνωτής φορτιζόταν (δηλ. από αυτή του σχήματος)

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Εκφόρτιση πυκνωτή**



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Φόρτιση πυκνωτή**

$$q(t) = C\boldsymbol{\varepsilon}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$i(t) = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

- **Εκφόρτιση πυκνωτή**

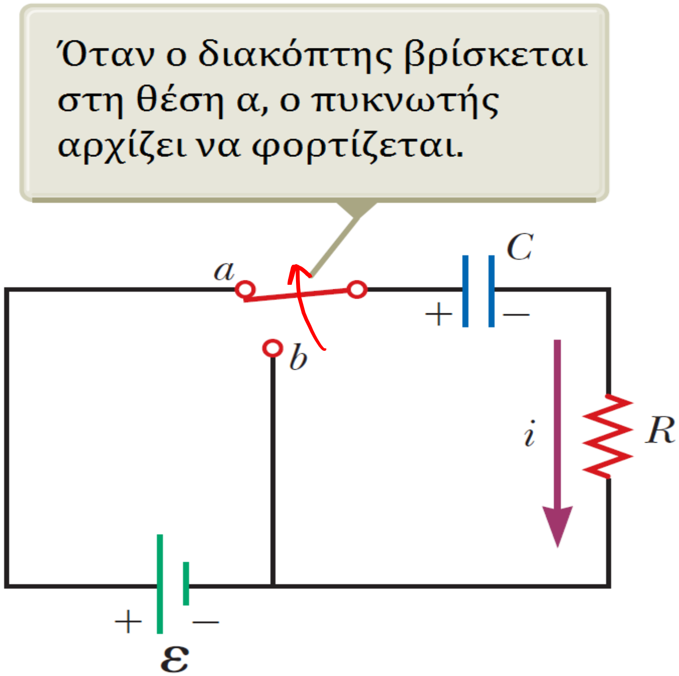
$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

- Όλα τα παραπάνω ορίζονται για $t > 0$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα:**
- Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά όπως δείξαμε πριν, με τιμές $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 12 V, C = 5 μF, και $R = 8 \times 10^5$ Ω. Ο διακόπτης γυρίζει στη θέση α. Βρείτε τη χρονική σταθερά τ, το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή, το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα και τις συναρτήσεις ρεύματος και φορτίου.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά με τιμές $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 12 V, C = 5 μF, και $R = 8 \times 10^5$ Ω. Ο διακόπτης γυρίζει στη θέση α. Βρείτε τη χρονική σταθερά τ, το μέγιστο φορτίο του πυκνωτή, το μέγιστο ρεύμα στο κύκλωμα και τις συναρτήσεις ρεύματος και φορτίου.

Είναι $\tau = RC = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{5} = 40 \, 10^{-1} = 4$ sec

Επίσης $Q_0 = C\mathcal{E} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 60 \cdot 10^{-6} = 60 \, \mu C$

—״— $i_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{R} = \dfrac{12}{8 \cdot 10^5} = \dfrac{3}{2} \cdot 10^{-5} = 1.5 \cdot 10^{-5} = 15 \, \mu A$

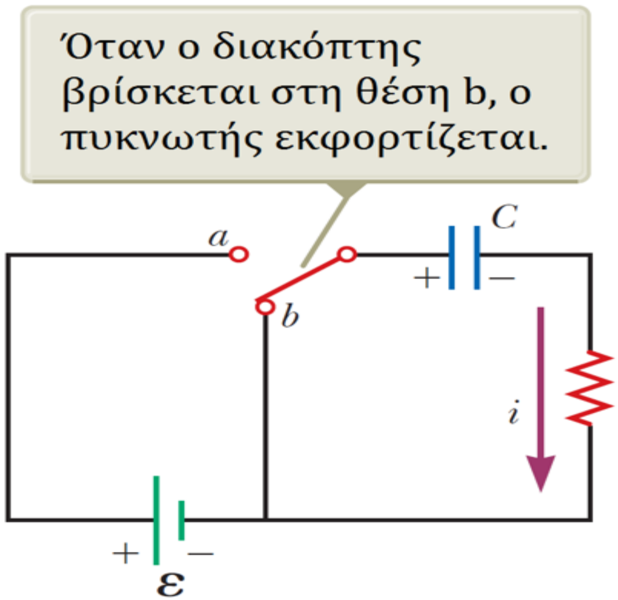
Τέλος,

$$q(t) = Q_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = 60 \cdot 10^{-6} \cdot \left(1 - e^{-t/4}\right) \; C$$

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau} = 15 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-t/4} \; A$$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα:**
- Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R, όπως είδαμε νωρίτερα.
  Α) Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται το φορτίο του πυκνωτή ίσο με το ¼ της αρχικής του τιμής;
  Β) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή φθίνει με το χρόνο όσο ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται η ενέργεια του πυκνωτή ίση με το ¼ της αρχικής της τιμής;



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R, όπως είδαμε νωρίτερα.
    A) Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται το φορτίο του πυκνωτή ίσο με το ¼ της αρχικής του τιμής;

· Έστω Q_0 το αρχικό φορτίο του πυκνωτή. Ζητάμε να λύσαμε την εξίσωση

$$q(t) = \frac{1}{4} Q_0 \Leftrightarrow \cancel{Q_0} e^{-t/\tau} = \frac{1}{4} \cancel{Q_0}$$

$$e^{-t/\tau} = \frac{1}{4}$$

$$\ln\left(e^{-t/\tau}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \cancel{\ln 1}^{\,0} - \ln 4$$

$$-\frac{t}{\tau} \cdot \cancel{\ln e}^{\,1} = -\ln 4$$

· Άρα $-\frac{t}{\tau} = -\ln 4 \Rightarrow t = \ln 4 \cdot \tau \simeq 1.38\tau$.

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Έστω ένας πυκνωτής χωρητικότητας C που εκφορτίζεται μέσω αντιστάτη αντίστασης R, όπως είδαμε νωρίτερα.
    B) Η ενέργεια που αποθηκεύεται στον πυκνωτή φθίνει με το χρόνο όσο ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Μετά από πόσες χρονικές σταθερές τ γίνεται η ενέργεια του πυκνωτή ίση με το ¼ της αρχικής της τιμής;

Έστω U_E η ενέργεια πο αποθηκεύεται σε έναν πυκνωτή.

Ζητάμε να λύσαμε την εξίσωση $U_E(t) = \frac{1}{4} U_E \iff$

$$\iff \cancel{\frac{1}{2}}\frac{q^2(t)}{\cancel{C}} = \frac{1}{4}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\frac{Q_0^2}{\cancel{C}} \iff q^2(t) = \frac{1}{4}Q_0^2 \iff$$

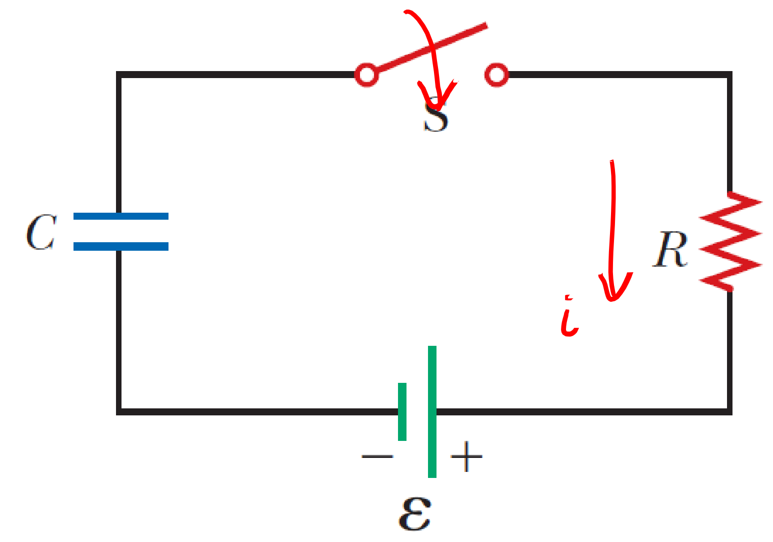
$$\iff \left(Q_0 e^{-t/\tau}\right)^2 = \frac{1}{4}Q_0^2 \iff \cancel{Q_0^2}\, e^{-2t/\tau} = \frac{1}{4}\cancel{Q_0^2} \iff$$

$$\iff e^{-\frac{2t}{\tau}} = \frac{1}{4} \iff \ln e^{-\frac{2t}{\tau}} = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \cancel{\ln 1}^{\,0} - \ln 4 = -\ln 4 \iff$$

$$\iff -\frac{2t}{\tau} = -\ln 4 \iff t = \frac{1}{2}\ln 4\ \tau \simeq 0{,}69\tau.$$

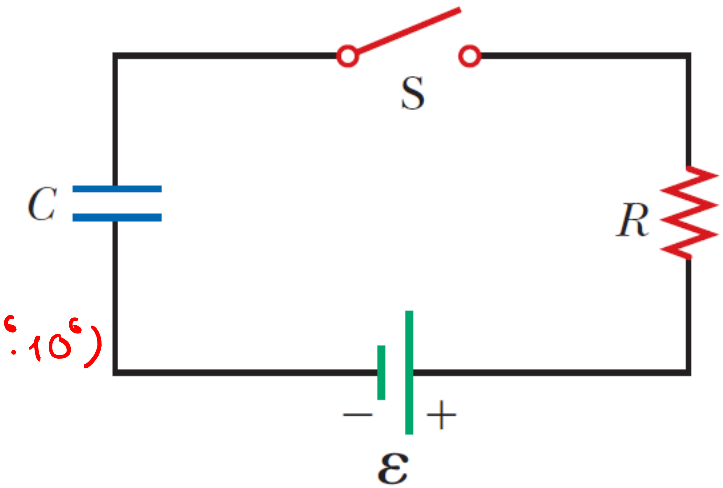
Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα:**
- Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά όπως δείξαμε πριν, με τιμές $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 30 V, C = 5 μF, και $R = 10^6$ Ω. Βρείτε το ρεύμα στον αντιστάτη 10 δευτερόλεπτα μετά το κλείσιμο του διακόπτη.



Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**
  - Ένας αφόρτιστος πυκνωτής κι ένας αντιστάτης συνδέονται σε σειρά όπως δείξαμε πριν, με τιμές $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 30 V, C = 5 μF, και $R = 10^6$ Ω. Βρείτε το ρεύμα στον αντιστάτη 10 δευτερόλεπτα μετά το κλείσιμο του διακόπτη.



Προφανώς, υπάρχει ρεύμα $i(t)$ στο κύκλωμα μόνο όταν ο διακόπτης είναι κλειστός. Είναι

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} = \frac{30}{10^6} e^{-t/(5\cdot 10^{-6}\cdot 10^{6})}$$

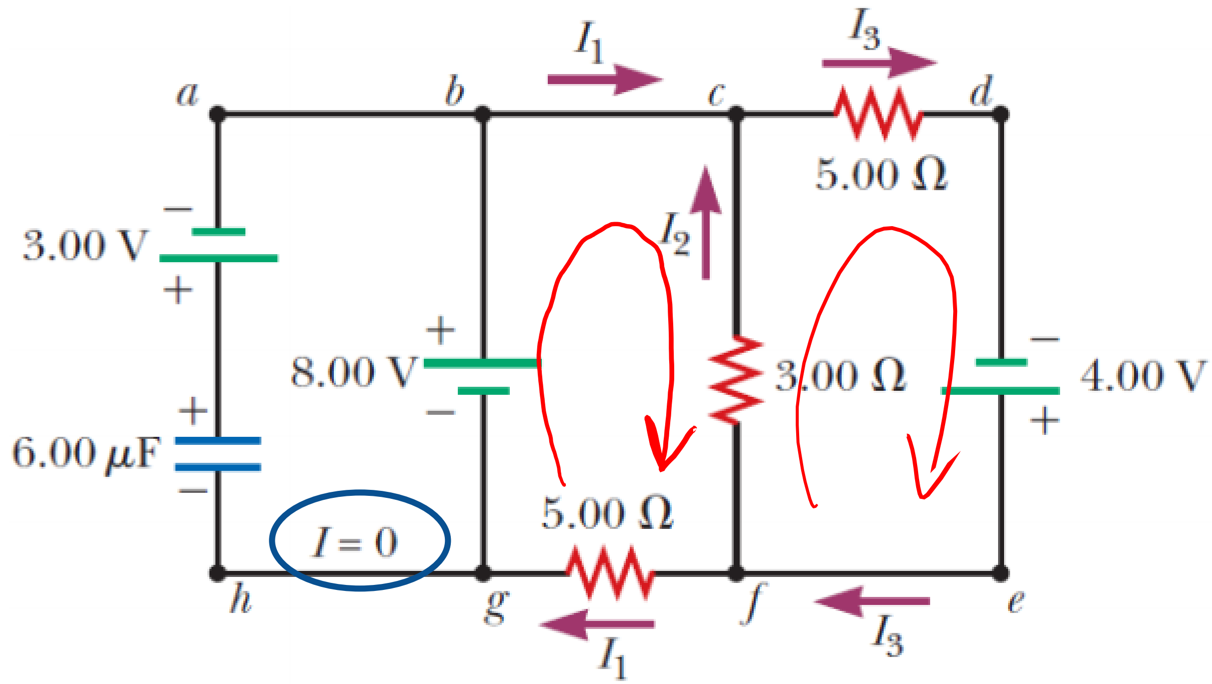
$$= 30\cdot 10^{-6} e^{-t/5} \text{ A}.$$

Για $t = 10$ s, $i(10) = 30\cdot 10^{-6} e^{-10/5} = 30\cdot 10^{-6}\cdot e^{-2} \simeq 4\cdot 10^{-6}$ A

$\simeq 4$ μA

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

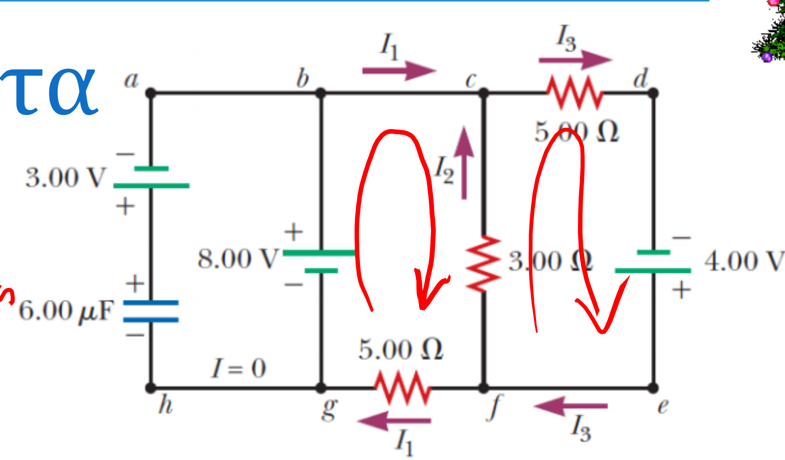
- **Παράδειγμα:**
- Το κύκλωμα του σχήματος έχει συνδεθεί για πολλή ώρα, έτσι ώστε ο πυκνωτής έχει φορτιστεί. Βρείτε τα ρεύματα και το φορτίο στον πυκνωτή.



Ο κλάδος ghab ΔΕ διαρρέεται από ρεύμα λόγω του ότι ο πυκνωτης είναι φορτισμένος!!

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Στον κόμβο c, ισχύει ο 1ος κανόνας Kirchhoff.

$$I_1 + I_2 = I_3 \quad (1)$$

Στο βρόχο gbcfg, ισχύει ο 2ος κανόνας Kirchhoff:

$$\sum_{gbcfg} \Delta V = 0 \Leftrightarrow +8 + 3I_2 - 5I_1 = 0 \quad (2)$$

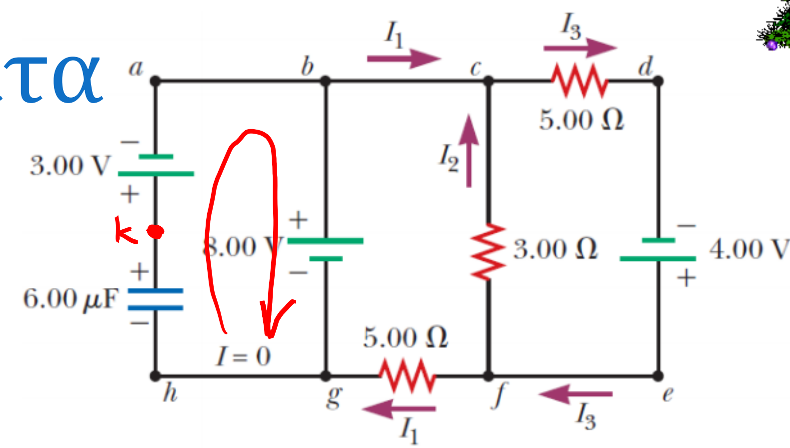
Στο βρόχο cdefc, ισχύει ο 2ος κανόνας Kirchhoff:

$$\sum_{cdefc} \Delta V = 0 \Leftrightarrow -5I_3 + 4 - 3I_2 = 0 \quad (3)$$

Λύνοντας το 3x3 σύστημα, έχουμε $I_1 = 1.38\ A$, $I_2 = -0.363\ A$, $I_3 = 1.02\ A$

Ηλεκτρικά Κυκλώματα

- **Παράδειγμα – Λύση:**



Για το φορτίο, ξέρουμε ότι

$$Q = C \cdot \Delta V$$

Στο βρόχο abgha, ισχύει ο 2ος κανόνας Kirchhoff:

$$\sum_{abgha} \Delta V = 0 \iff -8 + \frac{Q}{C} - 3 = 0 \iff \frac{Q}{6 \cdot 10^{-6}} = 11$$

$$\implies Q = 11 \cdot 6 \cdot 10^{-6}\ C = 66\ \mu C$$

1 PHYSICS

1.1 History

Aristotle said a bunch of stuff that was wrong. Galileo and Newton fixed things up. Then Einstein broke everything again. Now, we've basically got it all worked out, except for small stuff, big stuff, hot stuff, cold stuff, fast stuff, heavy stuff, dark stuff, turbulence, and the concept of time.


HAPPY NEW YEAR
2023